DINGJI · 考研数学

考研数学
一轮复习专题

第7—12章 · 高数专题

考情分析 · 命题规律 · 考向预测 · 知识框架 · 题型精讲 · 方法总结 · 自测 · 压轴三视角 · 思维品格。例题与练习全部取自定积AI 真题主库（含解析与错误标签），零编造。

零外链 | 本地字体 | KaTeX 公式 | A4 印刷 | 定积AI · 高数智慧课程

考研数学一 ·「曲线曲面积分」一轮复习教案

> 由定积AI 真题主库派生（零编造 · 零外链）。本章映射主库 **318 题**，覆盖 **5 个知识点**；例题、答案、易错点、压轴题均取自可作答题目。

一、考情分析

「曲线曲面积分」是考研数学的考点，章内主库题量 **318 题**，难度分布：基础 68 · 进阶 93 · 掌握 97 · 提高 3 · 挑战 57。

知识点覆盖：曲线积分（175 题）；曲面积分（92 题）；格林公式（21 题）；高斯公式（20 题）；斯托克斯公式（10 题）

二、历年命题规律（方向分析）

节点	题量	考频	典型抓手
曲线积分	175	高频	概念偏差；检查计算过程；常见粗心
曲面积分	92	中频	常见粗心；忘记乘3；约分错误
格林公式	21	基础	公式记忆错误；记忆格林公式条件不完整；混淆了公式本身的条件与某些推论的条件
高斯公式	20	基础	对向量微积分基本运算不熟练；忘记外法向为正的规定；公式符号理解错误
斯托克斯公式	10	基础	对旋度公式 $\nabla \times F$ 的符号不熟悉；未注意右手系定向规则；未正确计算截面三角形的边长和面积

三、考向预测

- **重组（约 50%）**：以 曲线积分、曲面积分、格林公式、高斯公式 为核心，与前后章知识（微分/积分/级数）交叉命题。
- **迁移（约 35%）**：把本章方法迁移到几何/物理建模与含参讨论题。
- **创新（约 15%）**：参数讨论型、反例构造型与综合证明型。

四、知识框架

```
ch10 曲线曲面积分
├── 曲线积分（高频，计算题86、选择题25、证明题25、判断题21）
├── 曲面积分（中频，计算题44、填空题16、证明题15、判断题13）
├── 格林公式（基础，计算题10、证明题4、判断题3、选择题2）
├── 高斯公式（基础，计算题9、证明题5、填空题3、判断题3）
└── 斯托克斯公式（基础，计算题4、判断题2、选择题2、证明题1）
```

五、题型精讲

题型 1：曲线积分（计算题）

识别标志：题干要求涉及「曲线积分」的概念辨析或计算（本章 175 题，含 计算题86、选择题25、证明题25）。

典型例题 1.1（基础 · 计算题）：

> 计算曲线积分 $I=\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds$，其中 L 是圆 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限的部分。

解析：

- Step 1：【思路分析】参数化圆弧，利用弧长元素 ds 与 a 的关系。 *(3 分)*
- Step 2：参数化 $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ t\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $ds=a\,dt$。 *(3 分)*
- Step 3：$\sqrt{x^2+y^2}=a$，故 $I=\int_0^{\pi/2} a\cdot a\,dt=a^2\cdot\frac{\pi}{2}$。 *(4 分)*

✅ **答案**：$\frac{\pi a^2}{2}$

> ⚠ **易错点**

> · 忘记是第一象限，角度应为 $\pi/2$ —— πa^2（粗心大意）
> · 漏掉一个 a 因子 —— $\frac{\pi a}{2}$（运算失误）

练习：

1. 计算 $\int_L (x+y)ds$，其中 L 是直线段从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$。 *（答案：$\sqrt{2}$）*
2. 计算 $\int_L x^2 ds$，其中 L 是圆 $x^2+y^2=1$ 的上半部分。 *（答案：$\frac{\pi}{2}$）*
3. 设 L 是抛物线 $y=x^2$ 从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$，求 $\int_L x\,ds$。 *（答案：$\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$）*
4. 设 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\oint_L (x^2+y^2)ds$ 等于（ ） *（答案：A）*

题型 2：曲面积分（计算题）

识别标志：题干要求涉及「曲面积分」的概念辨析或计算（本章 92 题，含 计算题44、填空题16、证明题15）。

典型例题 2.1（基础 · 计算题）：

> 计算第一类曲面积分 $\iint_S (x^2+y^2)\,dS$，其中 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $0\le z\le 1$ 的部分。

解析：

- Step 1：【思路分析】锥面投影到 xy 平面为圆盘 $x^2+y^2\le 1$，$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dxdy$，$z_x=x/\sqrt{x^2+y^2}$，$z_y=y/\sqrt{x^2+y^2}$，则 $\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$。 *(4 分)*
- Step 2：$I=\iint_D (x^2+y^2)\sqrt{2}\,dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2\cdot r\,dr\,d\theta=\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$。 *(6 分)*

✅ **答案**：$\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$

> **⚠ 易错点**
> · 忘记 $\sqrt{2}$ 因子 —— $\frac{\pi}{2}$（运算失误）
> · $\int r^3 dr$ 算错为 1/2 —— $\sqrt{2}\pi$（运算失误）

练习：

1. 计算第一类曲面积分 $\iint_S \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dS$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$。 *（答案：4π）*
2. 计算第一类曲面积分 $\iint_S z\,dS$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的上半球部分（$z\ge 0$）。 *（答案：πa^3）*

3. 计算 $\iint_S (x+y+z)\,dS$，S 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限的部分。 *（答案：$\frac{\sqrt{3}}{2}$）*

4. 计算 $\iint_S z\,dS$，S 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的上半球面。 *（答案：πR^3）*

题型 3：格林公式（计算题）

识别标志：题干要求涉及「格林公式」的概念辨析或计算（本章 21 题，含 计算题10、证明题4、判断题3）。

典型例题 3.1（进阶 · 判断题）：

> 判断下列说法是否正确：设 L 是平面上的一条封闭光滑曲线，P(x,y), Q(x,y) 在 L 所围区域 D 内具有一阶连续偏导数，则格林公式 $\oint_L P\,dx+Qdy=\iint_D(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)dxdy$ 一定成立。

解析：

- Step 1：格林公式的完整条件是：D 是由有限条分段光滑闭曲线围成的有界闭区域；P(x,y), Q(x,y) 在 D（即 D∪L）上具有一阶连续偏导数 *(2 分)*
- Step 2：题目仅说「在 L 所围区域 D 内」具有连续偏导数，但未提及边界 L 上的情况以及 D 的闭包 *(2 分)*
- Step 3：反例：$P=-y/(x^2+y^2), Q=x/(x^2+y^2)$，在包含原点的区域 D 内（原点为奇点）格林公式不成立 *(3 分)*
- Step 4：因此该说法缺少关键条件，是错误的 *(1 分)*
- Step 5：格林公式的正确表述要求 P,Q 在整个闭区域（含边界）上连续且偏导连续 *(2 分)*

✅ **答案**：错误

> ⚠ **易错点**
>
> · 记忆格林公式条件不完整 —— 认为说法正确（概念不清）
>
> · 混淆了公式本身的条件与某些推论的条件 —— 认为区域必须为单连通（概念不清）

练习：

1. 证明格林公式：设 D 是由分段光滑闭曲线 L 围成的平面有界区域，函数 P(x,y), Q(x,y) 在 D 上具有一阶连续偏导数，则 $\oint_L P\,dx+Qdy=\iint_D(\partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)dxdy$。 *（答案：证明见解析）*
2. 设 L 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=4$，则曲线积分 $\oint_L (y^3\,dx-x^3\,dy)$ 的值为 *（答案：C）*

3. 设 D 为 R^2 中的有界闭区域，边界 ∂D 为分段光滑的闭曲线（逆时针方向）。利用格林公式证明：$A(D)=\frac{1}{2}\oint_{\partial D}(x\,dy-y\,dx)$ 其中 D 是区域 D 的面积。 *（答案：取 $P=-y/2, Q=x/2$ 代入格林公式。）*

4. 判断：格林公式 $\oint_L P\,dx+Q\,dy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})\,dxdy$ 要求 L 是 D 的正向边界（逆时针），P,Q 在 D 上具有一阶连续偏导数。 *（答案：正确）*

题型 4：高斯公式（计算题）

识别标志：题干要求涉及「高斯公式」的概念辨析或计算（本章 20 题，含 计算题9、证明题5、填空题3）。

典型例题 4.1（挑战 · 证明题）：

> 设 $\Omega\subset R^3$ 是由封闭光滑曲面 S 围成的有界区域，向量场 $F=(x^3,y^3,z^3)$。证明：$\iint_S F\cdot ndS=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV$，其中 n 为 S 的单位外法向量。

解析：

- Step 1：由高斯散度定理：$\iint_S F\cdot ndS=\iiint_\Omega divF\,dV$ *(2 分)*
- Step 2：计算 $divF=\partial(x^3)/\partial x+\partial(y^3)/\partial y+\partial(z^3)/\partial z=3x^2+3y^2+3z^2=3(x^2+y^2+z^2)$ *(2 分)*
- Step 3：代入高斯公式得：$\iint_S F\cdot ndS=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)dV=3\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dV$ *(2 分)*
- Step 4：证毕。此即高斯散度定理的直接应用：散度在区域上的三重积分等于通量 *(1 分)*
- Step 5：进一步分析：该结论对任意以 $F=(x^n,y^n,z^n)$ 形式皆可推广，关键在于 div F 的对称性 *(1 分)*
- Step 6：当 Ω 为单位球时，右侧可进一步计算为 $3\int_0^1 r^2\cdot 4\pi r^2dr=12\pi/5$，左侧也可直接验证 *(2 分)*

✅ **答案**：证明见解析

> **⚠ 易错点**
>
> · 对向量微积分基本运算不熟练 —— 混淆了散度与旋度的计算公式（概念不清）
> · 忘记外法向为正的规定 —— 方向搞反 = 写成 $\iint_S F\cdot ndS=-\iiint_\Omega divF\,dV$（步骤遗漏）

练习：

1. 设 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧，则曲面积分

$$\iint_{\Sigma} x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

。 *（答案：$\frac{12\pi}{5}$）*

2. 证明：若 Σ 为封闭曲面（外侧），则

$$\iint_{\Sigma} (x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy) = 3V$$

，其中 V 为 Σ 所围区域的体积。 *（答案：利用高斯公式转化为三重积分。）*

3. 设 $u(x,y,z)$ 在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上有连续的二阶偏导数，且在边界 $\partial\Omega$ 上 $u=0$。证明：

$$\iiint_{\Omega} (u_x^2+u_y^2+u_z^2)\,dV = -\iiint_{\Omega} u\,\Delta u\,dV$$

其中 $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$ 是拉普拉斯算子。 *（答案：利用高斯公式和散度定理。）*

4. 判断：若 Σ 为分片光滑闭曲面（外侧），P,Q,R 在 Σ 围成的闭区域 Ω 上有一阶连续偏导数，则高斯公式 $\iint_{\Sigma} P\,dydz + Q\,dzdx + R\,dxdy = \iiint_{\Omega}(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z})\,dV$ 成立。 *（答案：正确）*

题型 5：斯托克斯公式（计算题）

识别标志：题干要求涉及「斯托克斯公式」的概念辨析或计算（本章 10 题，含 计算题4、判断题2、选择题2）。

典型例题 5.1（挑战 · 计算题）：

> 利用斯托克斯公式计算曲线积分 $\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 Γ 是平面 x+y+z=1 被三个坐标平面截得的三角形边界，方向与平面法向量 (1,1,1) 构成右手系。

解析：

- Step 1：设向量场 $F=(y^2-z^2, z^2-x^2, x^2-y^2)$，曲面 S: x+y+z=1, x≥0, y≥0, z≥0 *(1 分)*
- Step 2：计算旋度：$curl F = (\partial R/\partial y-\partial Q/\partial z, \partial P/\partial z-\partial R/\partial x, \partial Q/\partial x-\partial P/\partial y)$ *(1 分)*
- Step 3：其中 $P=y^2-z^2, Q=z^2-x^2, R=x^2-y^2$ *(1 分)*
- Step 4：$\partial R/\partial y=-2y, \partial Q/\partial z=2z$ → 第一分量 = -2y-2z = -2(y+z) *(1 分)*
- Step 5：类似得 curl F = -2(y+z, x+z, x+y) *(1 分)*

- Step 6：曲面 S 的单位法向量 $n = (1,1,1)/\sqrt{3}$ *(1 分)*
- Step 7：$curl F \cdot n = -2[(y+z)+(x+z)+(x+y)]/\sqrt{3} = -4(x+y+z)/\sqrt{3} = -4/\sqrt{3}$ *(1 分)*
- Step 8：三角形顶点 (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)，面积 = $\sqrt{3}/2$ *(1 分)*
- Step 9：由斯托克斯公式：$\oint_\Gamma F \cdot dr = \iint_S curl F \cdot n dS = (-4/\sqrt{3}) \times (\sqrt{3}/2) = -2$ *(1 分)*
- Step 10：注意曲面定向与边界走向的右手系关系，结果为 -2 *(1 分)*

✅ **答案**：-2

> ⚠ **易错点**
>
> · 对旋度公式 $\nabla \times F$ 的符号不熟悉 —— 旋度计算错误（运算失误）
> · 未注意右手系定向规则 —— 法向量方向搞反（概念不清）
> · 未正确计算截面三角形的边长和面积 —— 三角形面积算错（运算失误）

练习：

1. 判断：斯托克斯公式 $\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$ 中的曲面 Σ 可以是任意以 Γ 为边界的曲面且方向满足右手定则。 *（答案：正确）*
2. 用斯托克斯公式计算 $\oint_\Gamma y\,dx + z\,dy + x\,dz$，其中 Γ 为平面 $x+y+z=1$ 与坐标面围成的三角形边界，方向按右手定则（从上侧看逆时针）。 *（答案：$-\frac{3}{2}$）*
3. 利用斯托克斯公式计算 $\oint_L -y\,dx + x\,dy$，其中 L 为平面 $z=0$ 上的单位圆，逆时针方向。 *（答案：2π）*
4. 设 L 为空间闭曲线，$\oint_L x\,dx + y\,dy + z\,dz =$ （ ）。 *（答案：A）*

六、方法总结

题型	方法	注意事项
曲线积分	计算题	概念偏差；检查计算过程
曲面积分	计算题	常见粗心；忘记乘3
格林公式	计算题	公式记忆错误；记忆格林公式条件不完整

题型	方法	注意事项
高斯公式	计算题	对向量微积分基本运算不熟练；忘记外法向为正的规定
斯托克斯公式	计算题	对旋度公式 ∇×F 的符号不熟悉；未注意右手系定向规则

高频错误速查：概念不清 × 254；运算失误 × 176；粗心大意 × 81；步骤遗漏 × 48；计算粗心 × 26。

七、交互式自测

本章主库可作答题目 **318 题**，建议按「基础 → 进阶 → 掌握 → 挑战」分层完成：68 / 93 / 97 / 57。

八、压轴题三视角：重组 / 迁移 / 创新

视角 1（重组）：设 L 为任意一条不经过原点的正向闭曲线，证明 $\oint_L \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi k$，其中 k 为 L 绕原点的圈数。

视角 2（迁移）：物体从 $(0,0)$ 提升到 $(1,1)$（单位 m），克服重力（1 kg）做功最小路径。

视角 3（创新）：设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧，计算 $\iint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$。

九、思维品格加油站

- **品格一 · 从局部到整体**：先抓住微元，再沿曲线/曲面累积成整体量。
- **品格二 · 联系的观点**：格林、高斯、斯托克斯把不同积分统一为同一思想。
- **品格三 · 物理直观**：环流量与通量让抽象积分在物理场景中"看得见"。

考研数学一 ·「无穷级数」一轮复习教案

> 由定积AI 真题主库派生（零编造 · 零外链）。本章映射主库 **403 题**，覆盖 **6 个知识点**；例题、答

> 案、易错点、压轴题均取自可作答题目。

一、考情分析

「无穷级数」是考研数学的考点，章内主库题量 **403 题**，难度分布：基础 98 · 进阶 140 · 掌握 104 · 提高 1 · 挑战 58 · 精通 2。

知识点覆盖：常数项级数（195 题）；幂级数（105 题）；数项级数求和（38 题）；幂级数展开（33 题）；数项级数审敛（21 题）；函数项级数（11 题）

二、历年命题规律（方向分析）

节点	题量	考频	典型抓手		
常数项级数	195	高频	常见错误；检查计算过程；概念偏差		
幂级数	105	中频	常见粗心；常见错误；检查计算过程		
数项级数求和	38	基础	常见粗心；概念偏差；常见错误		
幂级数展开	33	基础	常见错误；常见粗心错误；常见粗心		
数项级数审敛	21	基础	常见粗心；当 $	a_n	\ge1时不等式反向；无法建立a_n^2与\frac1{n^2}$ 的直接联系
函数项级数	11	基础	M-判别法需要优级数收敛；区间外 $	x	^n$ 可能无界；两者有蕴含关系

三、考向预测

- **重组（约 50%）**：以 常数项级数、幂级数、数项级数求和、幂级数展开 为核心，与前后章知识（微分/积分/级数）交叉命题。

- **迁移（约 35%）**：把本章方法迁移到几何/物理建模与含参讨论题。
- **创新（约 15%）**：参数讨论型、反例构造型与综合证明型。

四、知识框架

```
ch11 无穷级数
├── 常数项级数（高频，计算题77、选择题35、判断题32、证明题31）
├── 幂级数（中频，计算题35、填空题23、选择题22、判断题13）
├── 数项级数求和（基础，计算题27、选择题5、填空题5、证明题1）
├── 幂级数展开（基础，计算题18、填空题13、判断题1、选择题1）
├── 数项级数审敛（基础，计算题9、证明题4、选择题4、判断题3）
└── 函数项级数（基础，计算题3、填空题3、判断题2、选择题2）
```

五、题型精讲

题型 1：常数项级数（计算题）

识别标志：题干要求涉及「常数项级数」的概念辨析或计算（本章 195 题，含 计算题77、选择题35、判断题32）。

典型例题 1.1（基础 · 填空题）：

> 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ 收敛性

解析：

- Step 1：$\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$，$p = 2$ 级数收敛，比较判别法　*(10 分)*

✅ **答案**：收敛

> ⚠ **易错点**
>
> · 计算过程不够仔细 —— 计算粗心导致答案错误（计算粗心）
> · 基本公式不牢固 —— 公式记忆不准确导致系数错误（概念不清）

练习：

1. 判断 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ 收敛性　*（答案：收敛）*

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 的敛散性。 *（答案：收敛）*

3. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛的条件是（ ） *（答案：C）*

4. 判断：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$ 收敛。（ ） *（答案：正确）*

题型 2：幂级数（计算题）

识别标志：题干要求涉及「幂级数」的概念辨析或计算（本章 105 题，含 计算题35、填空题23、选择题22）。

典型例题 2.1（基础 · 计算题）：

> 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛半径和收敛域。

解析：

- Step 1：系数 $a_n=\frac{1}{n}$，$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\frac{1/n}{1/(n+1)}=1$。 *(4 分)*
- Step 2：端点：$x=1$ 时 $\sum\frac{1}{n}$ 发散；$x=-1$ 时 $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛。 *(3 分)*
- Step 3：故收敛域 $[-1,1)$。 *(3 分)*

✅ **答案**：$R=1$，收敛域 $[-1,1)$

> ⚠ **易错点**
>
> · 未检验 $x=1$ 发散 —— $R=1$ 但收敛域写 $[-1,1]$（步骤遗漏）
>
> · 比值计算错误 —— $R=\infty$（运算失误）

练习：

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ 的收敛域与和函数 *（答案：$[-1,1)$，$-\ln(1-x)$）*
2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n}$ 的收敛半径和收敛域。 *（答案：$R=1$，收敛域 $[-1,1]$）*
3. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ 的和函数 *（答案：e^{x^2}）*
4. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)2^n}$ 的和函数。 *（答案：$-\frac{2}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right)$，$|x|<2$，且 $S(0)=\frac{1}{2}$）*

题型 3：数项级数求和（计算题）

识别标志：题干要求涉及「数项级数求和」的概念辨析或计算（本章 38 题，含 计算题27、选择题5、填空题5）。

典型例题 3.1（基础 · 计算题）：

> 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 的和。

解析：

- Step 1：【思路分析】裂项相消。$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$。 *(3 分)*
- Step 2：$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1}$。令 $N \to \infty$，极限为 1。 *(6 分)*
- Step 3：验证：$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \cdots$ 部分和依次为 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$，趋于1。 *(1 分)*

✅ **答案**：1

> ⚠ **易错点**
>
> · 误用比较法，$\frac{1}{n^2}$ 的级数收敛，该级数与 $\frac{1}{n^2}$ 同阶 —— 判为发散（概念不清）
> · 裂项时符号搞反 —— ∞（运算失误）
> · 部分和写成 $\frac{1}{N+1}$ —— 0（粗心大意）

练习：

1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$ 的和函数，并求收敛域。 *（答案：$\frac{1}{(1-x)^2}$，$|x| < 1$）*
2. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的和函数。 *（答案：$-\ln(1-x)$，$|x| < 1$）*
3. 下列级数中收敛的是： *（答案：B）*
4. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$ 的收敛半径是： *（答案：C）*

题型 4：幂级数展开（计算题）

识别标志：题干要求涉及「幂级数展开」的概念辨析或计算（本章 33 题，含 计算题18、填空题13、判断题1）。

典型例题 4.1（基础 · 填空题）：

> 将 $\frac{1}{1+x}$ 展开为 x 的幂级数

解析：

- Step 1：$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum(-1)^n x^n$ *(10 分)*

✅ **答案**：$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\ |x| < 1$

> ⚠ **易错点**
>
> · 计算过程不够仔细 —— 计算粗心导致答案错误（计算粗心）
>
> · 基本公式不牢固 —— 公式记忆不准确导致系数错误（概念不清）

练习：

1. 将函数 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数。 *（答案：$\sum_{n=0}^{\infty} x^n,\ |x| < 1$）*
2. 将函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。 *（答案：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\ -1 < x \le 1$）*
3. 将 $f(x) = \sin x$ 展开成 x 的幂级数（麦克劳林级数）。 *（答案：$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$）*
4. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数。 *（答案：$\cosh x$）*

题型 5：数项级数审敛（计算题）

识别标志：题干要求涉及「数项级数审敛」的概念辨析或计算（本章 21 题，含 计算题9、证明题4、选择题4）。

典型例题 5.1（掌握 · 证明题）：

> 证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 也收敛。

解析：

- Step 1：【思路分析】绝对收敛意味着 $\sum |a_n|$ 收敛，需要利用 a_n^2 与 $|a_n|$ 的大小关系。当 $|a_n|$ 充分小（或对所有 n）有 $a_n^2 \le |a_n|$。 *(3 分)*
- Step 2：由 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，知 $\lim_{n\to\infty}|a_n| = 0$。从而存在 N，当 $n > N$ 时 $|a_n| < 1$，此时 $a_n^2 \le |a_n|$。故 $\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n^2 \le \sum_{n=N+1}^{\infty}|a_n| < \infty$。前 N 项为有限和，不影响收敛性。因此 $\sum a_n^2$ 收敛。 *(6 分)*
- Step 3：注：逆命题不成立。如 $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，$\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ 发散，但 $\sum a_n$ 条件收敛。 *(1 分)*

✅ **答案**：见解析

> ⚠ **易错点**
>
> · 当 $|a_n| \geq 1$ 时不等式反向 —— 直接说 $a_n^2 \leq |a_n|$ 对所有 n 成立（概念不清）
> · 无法建立 a_n^2 与 $\frac{1}{n^2}$ 的直接联系 —— 与 $\sum \frac{1}{n^2}$ 比较（概念不清）
> · 反例 $a_n = \frac{1}{n^2}$ 绝对收敛，$\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n^4}$ 也收敛 —— 认为 $\sum a_n^2$ 一定发散（概念不清）

练习：

1. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ 的和函数。 *（答案：$-\ln(1-\frac{x}{2})$）*
2. 将 $f(x) = \arctan x$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$。 *（答案：$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$）*
3. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ 的收敛性。 *（答案：A）*
4. 判断 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ 的收敛性。 *（答案：C）*

题型 6：函数项级数（计算题）

识别标志：题干要求涉及「函数项级数」的概念辨析或计算（本章 11 题，含 计算题3、填空题3、判断题2）。

典型例题 6.1（挑战 · 证明题）：

> 证明函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛。

解析：

- Step 1：在 $[-1, 1]$ 上，$|x| \leq 1$，故 $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$。 *(4 分)*
- Step 2：取 $M_n = \frac{1}{n^2}$，则 $\sum M_n = \sum \frac{1}{n^2}$ 是 p-级数（$p = 2 > 1$），收敛。 *(3 分)*
- Step 3：由 Weierstrass M-判别法，$\sum \frac{x^n}{n^2}$ 在 $[-1, 1]$ 上一致收敛。 *(3 分)*

✅ **答案**：用 Weierstrass M-判别法。

> ⚠ **易错点**
>
> · M-判别法需要优级数收敛 —— 忘记说明 M_n 级数收敛（步骤遗漏）
> · 区间外 $|x|^n$ 可能无界 —— 在 $[-1, 1]$ 外使用 M-判别法（概念不清）

练习：

1. 判断：若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛，则它在 I 上必逐点收敛。 *（答案：正确）*
2. 求函数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ 的收敛域。 *（答案：$|x|<1$，即 $(-1,1)$）*
3. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛域为 ____。 *（答案：$[-1,1)$）*
4. 设 $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是微分方程 $y'=y$ 满足 $y(0)=1$ 的幂级数解，求系数 a_n。 *（答案：$a_n=\frac{1}{n!}$，即 $y=e^x$）*

六、方法总结

题型	方法	注意事项		
常数项级数	计算题	常见错误；检查计算过程		
幂级数	计算题	常见粗心；常见错误		
数项级数求和	计算题	常见粗心；概念偏差		
幂级数展开	计算题	常见错误；常见粗心错误		
数项级数审敛	计算题	常见粗心；当 $	a_n	\ge1$ 时不等式反向
函数项级数	计算题	M-判别法需要优级数收敛；区间外 $	x	^n$ 可能无界

高频错误速查：概念不清 × 390；运算失误 × 163；步骤遗漏 × 84；粗心大意 × 76；计算粗心 × 40。

七、交互式自测

本章主库可作答题目 **403 题**，建议按「基础 → 进阶 → 掌握 → 挑战」分层完成：98 / 140 / 104 / 58。

八、压轴题三视角：重组 / 迁移 / 创新

视角 1（重组）：$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ 的值。

视角 2（迁移）：资产价格 $S(t) = S_0 e^{\mu t + \sigma W(t)}$，求预期价格 $E[S(t)]$。

视角 3（创新）：L4:股票价格 $S(t) = S_0 e^{(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)}$，分析为什么有 $-\sigma^2/2$ 项。

九、思维品格加油站

- **品格一 · 有限与无限**：用有限的项逼近无限的极限，理解收敛与发散的分界。
- **品格二 · 判别的智慧**：不同判别法各有所长，选择即判断力的体现。
- **品格三 · 逼近思想**：幂级数用多项式无限逼近函数，是"以简驭繁"的典范。

考研数学一 ·「傅里叶级数」一轮复习教案

> 由定积AI 真题主库派生（零编造 · 零外链）。本章映射主库 **21 题**，覆盖 **1 个知识点**；例题、答案、易错点、压轴题均取自可作答题目。

一、考情分析

「傅里叶级数」是考研数学的考点，章内主库题量 **21 题**，难度分布：基础 4 · 进阶 6 · 掌握 7 · 挑战 4。

知识点覆盖：傅里叶级数（21 题）

二、历年命题规律（方向分析）

节点	题量	考频	典型抓手
傅里叶级数	21	高频	常见粗心；常见错误；概念偏差

三、考向预测

- **重组（约 50%）**：以 傅里叶级数 为核心，与前后章知识（微分/积分/级数）交叉命题。
- **迁移（约 35%）**：把本章方法迁移到几何/物理建模与含参讨论题。
- **创新（约 15%）**：参数讨论型、反例构造型与综合证明型。

四、知识框架

```
ch12 傅里叶级数
└── 傅里叶级数（高频，计算题12、填空题5、选择题3、证明题1）
```

五、题型精讲

题型 1：傅里叶级数（计算题）

识别标志：题干要求涉及「傅里叶级数」的概念辨析或计算（本章 21 题，含 计算题12、填空题5、选择题3）。

典型例题 1.1（掌握 · 填空题）：

> $f(x)=x$（$-\pi<x<\pi$）的傅里叶级数在 $x=\pi$ 收敛于?

解析：

- Step 1：$f(\pi^-)=\pi$，$f(\pi^+)=-\pi$，收敛于 $\frac{\pi+(-\pi)}{2}=0$ *(10 分)*

✅ **答案**：0

> ⚠ **易错点**
>
> · 计算过程不够仔细 —— 计算粗心导致答案错误（计算粗心）
> · 基本公式不牢固 —— 公式记忆不准确导致系数错误（概念不清）

练习：

1. 函数 $f(x)=x$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上展开成傅里叶级数。 *（答案：$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$）*

2. $f(x)=|x|$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上是奇函数还是偶函数？其傅里叶级数含哪些项？ *（答案：B）*

3. $f(x)=x^2$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶系数 a_0 为____。 *（答案：$\frac{2\pi^2}{3}$）*

4. $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展开成余弦级数。 *（答案：$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$）*

六、方法总结

题型	方法	注意事项
傅里叶级数	计算题	常见粗心；常见错误

高频错误速查：概念不清 × 14；粗心大意 × 14；运算失误 × 9；步骤遗漏 × 4；计算粗心 × 3。

七、交互式自测

本章主库可作答题目 **21 题**，建议按「基础 → 进阶 → 掌握 → 挑战」分层完成：4 / 6 / 7 / 4。

八、压轴题三视角：重组 / 迁移 / 创新

视角 1（重组）：求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$的和。

视角 2（迁移）：设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，求f(x)的表达式，并利用此结果求$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$的值。

视角 3（创新）：将函数$f(x)=x^2$在区间[-π,π]上展开为傅里叶级数。

九、思维品格加油站

- **品格一 · 分解与合成**：把复杂周期现象分解为简单正弦波的叠加。
- **品格二 · 对称之美**：奇偶延拓把区间外的信息由对称规则补全。
- **品格三 · 逼近与拟合**：有限项和逼近函数，体现工程近似中的取舍。

考研数学一 ·「向量与空间解析几何」一轮复习教案

> 由定积AI 真题主库派生（零编造 · 零外链）。本章映射主库 **212 题**，覆盖 **3 个知识点**；例题、答案、易错点、压轴题均取自可作答题目。

一、考情分析

「向量与空间解析几何」是考研数学的考点，章内主库题量 **212 题**，难度分布：基础 64 · 进阶 76 · 掌握 46 · 挑战 26。

知识点覆盖：向量代数（69 题）；平面与直线（91 题）；曲面方程（52 题）

二、历年命题规律（方向分析）

节点	题量	考频	典型抓手
向量代数	69	高频	常见错误；概念偏差；检查计算过程
平面与直线	91	高频	常见粗心；概念偏差；常见错误
曲面方程	52	中频	常见粗心；常见错误；概念偏差

三、考向预测

- **重组（约 50%）**：以 向量代数、平面与直线、曲面方程 为核心，与前后章知识（微分/积分/级数）交叉命题。
- **迁移（约 35%）**：把本章方法迁移到几何/物理建模与含参讨论题。
- **创新（约 15%）**：参数讨论型、反例构造型与综合证明型。

四、知识框架

ch7 向量与空间解析几何
├── 向量代数（高频，计算题23、填空题17、判断题12、选择题10）
├── 平面与直线（高频，计算题42、选择题15、填空题15、证明题13）
└── 曲面方程（中频，计算题23、填空题12、选择题11、判断题4）

五、题型精讲

题型 1：向量代数（计算题）

识别标志：题干要求涉及「向量代数」的概念辨析或计算（本章 69 题，含 计算题23、填空题17、判断题12）。

典型例题 1.1（基础 · 选择题）：

> 已知向量 $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$，$\mathbf{b} = (2, -1, 1)$，则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ 的值为（ ）

解析：

- Step 1：点积公式：$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$。 *(5 分)*
- Step 2：$= 1 \times 2 + 2 \times (-1) + 3 \times 1 = 2 - 2 + 3 = 3$。 *(5 分)*

✅ **答案**：A

> ⚠ **易错点**
>
> · 符号错误，将 -1 当作 1 计算 —— 5（运算失误）
> · 忘记第二项为负 —— 7（运算失误）
> · 全部相乘后相加，混淆了点积与叉积 —— 9（概念不清）

练习：

1. 已知 $|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3, \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 60°$，求 $|\vec{a} - \vec{b}|$ *（答案：$\sqrt{7}$）*
2. 向量 $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ 与 $\mathbf{b} = (2, 4, 6)$ 的位置关系是（ ） *（答案：B）*
3. $\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-1, 1, 0)$，求 $\vec{a} \times \vec{b}$ *（答案：$(-3, -3, 3)$）*
4. 已知 $\mathbf{a} = (1, 0, 0)$，$\mathbf{b} = (0, 1, 0)$，则 $\mathbf{a} \times \mathbf{b} =$ ____。 *（答案：$(0, 0, 1)$）*

题型 2：平面与直线（计算题）

识别标志：题干要求涉及「平面与直线」的概念辨析或计算（本章 91 题，含 计算题42、选择题15、填空题15）。

典型例题 2.1（基础 · 选择题）：

> 过点 $P(1,2,3)$ 且法向量为 $\mathbf{n}=(2,-1,2)$ 的平面方程为（ ）

解析：

- Step 1：点法式平面方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$。 *(3 分)*
- Step 2：代入 $A=2,B=-1,C=2,(x_0,y_0,z_0)=(1,2,3)$：$2(x-1)-1(y-2)+2(z-3)=0$。 *(3 分)*
- Step 3：整理：$2x-y+2z-2+2-6=0$，即 $2x-y+2z=6$。 *(4 分)*

✅ **答案**：A

> ⚠ **易错点**
>
> · 计算常数项正确 —— 选 A（运算失误）
> · 漏掉 2 的贡献 —— 选 C（运算失误）
> · 误用点坐标作为法向量 —— 选 D（概念不清）

练习：

1. 过 $(1,2,3)$ 且垂直于平面 $x-2y+3z=5$ 的直线方程 *（答案：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{3}$）*
2. 判断：平面 $2x-y+z=1$ 与平面 $4x-2y+2z=3$ 的位置关系是（ ） *（答案：A）*
3. 点 $(1,2,3)$ 到平面 $x-2y+2z-1=0$ 的距离 *（答案：$\frac{2}{3}$）*
4. 求点 $P(1,2,3)$ 到平面 $2x-y+2z=6$ 的距离。 *（答案：0）*

题型 3：曲面方程（计算题）

识别标志：题干要求涉及「曲面方程」的概念辨析或计算（本章 52 题，含 计算题23、填空题12、选择题11）。

典型例题 3.1（基础 · 计算题）：

> 求曲线 $\begin{cases} y^2+z^2=4 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所得旋转曲面方程。

解析：

- Step 1：【思路分析】旋转曲面：母线为 yz 平面上的圆，绕 z 轴旋转。关键公式：绕 z 轴旋转时，y^2 替换为 x^2+y^2。 *(3 分)*
- Step 2：母线方程中 $y^2+z^2=4$，$x=0$。绕 z 轴旋转，y^2 变为 x^2+y^2，得 $x^2+y^2+z^2=4$。这是一个球心在原点的球面。 *(6 分)*
- Step 3：验证：$x=0$ 代入得母线的圆，切面为圆与预期一致。 *(1 分)*

✅ **答案**：$x^2+y^2+z^2=4$

> ⚠ **易错点**
>
> · 漏掉旋转变换，直接写了母线方程 —— $y^2+z^2=4$（不变）（粗心大意）
> · 忘记 z 部分 —— $x^2+y^2=4$（运算失误）
> · 混淆了不同旋转轴的情形 —— $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$（概念不清）

练习：

1. 曲面 $z=x^2+y^2$ 在 $(1,1,2)$ 处的切平面方程 *（答案：$2x+2y-z=2$）*
2. 求过曲线 $\begin{cases} z=x^2 \\ y=0 \end{cases}$ 且母线平行于 y 轴的柱面方程。 *（答案：$z=x^2$（在空间表示柱面））*
3. 求曲线 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$ 在 xOy 平面上的投影曲线方程。 *（答案：$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$）*
4. 方程 $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ 在空间表示什么曲面？ *（答案：圆柱面）*

六、方法总结

题型	方法	注意事项
向量代数	计算题	常见错误；概念偏差
平面与直线	计算题	常见粗心；概念偏差

题型	方法	注意事项
曲面方程	计算题	常见粗心；常见错误

高频错误速查：概念不清 × 197；运算失误 × 111；粗心大意 × 57；步骤遗漏 × 38；计算粗心 × 15。

七、交互式自测

本章主库可作答题目 **212 题**，建议按「基础 → 进阶 → 掌握 → 挑战」分层完成：64 / 76 / 46 / 26。

八、压轴题三视角：重组 / 迁移 / 创新

视角 1（重组）：求点 $P(1,2,3)$ 到直线 $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{2}$ 的距离。

视角 2（迁移）：正三角形三顶点为 $(0,0),(d,0),(d/2,\sqrt{3}d/2)$，求覆盖三点的最小圆半径。

视角 3（创新）：求直线 $L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$ 与 $L_2:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$ 的公垂线方程。

九、思维品格加油站

- **品格一 · 数形结合**：把几何直观翻译成向量与坐标，图与式互相印证。
- **品格二 · 化归思想**：把空间问题化到平面、把复杂图形化为基本元。
- **品格三 · 严谨推理**：位置关系的每种情形都要给出依据，不凭"看起来"。

考研数学一 ·「多元函数微分学」一轮复习教案

> 由定积AI 真题主库派生（零编造 · 零外链）。本章映射主库 **437 题**，覆盖 **9 个知识点**；例题、答案、易错点、压轴题均取自可作答题目。

一、考情分析

「多元函数微分学」是考研数学的考点，章内主库题量 **437 题**，难度分布：基础 113 · 进阶 137 · 掌握 123 · 提高 2 · 挑战 62。

知识点覆盖：多元函数极限与连续（30 题）；偏导数（95 题）；全微分与可微性（45 题）；链式法则（15 题）；隐函数求偏导（43 题）；多元函数极值（75 题）；条件极值（19 题）；方向导数与梯度（66 题）；多元函数微分学的应用（49 题）

二、历年命题规律（方向分析）

节点	题量	考频	典型抓手
多元函数极限与连续	30	中频	常见粗心；偏导概念不清；直线逼近只能说明沿直线连续，不能证明全面连续
偏导数	95	高频	常见错误；概念偏差；检查计算过程
全微分与可微性	45	中频	需验证定义；未求具体点的偏导值；与一元函数混淆
链式法则	15	基础	y 也随 t 变化，须用链式法则；$2t \cdot t^2 + t^2 \cdot 2t = 2t^3 + 2
隐函数求偏导	43	中频	常见错误；概念偏差；链式法则遗漏
多元函数极值	75	高频	概念偏差；常见错误；检查计算过程
条件极值	19	基础	方法错误；未讨论x=0或y=0；条件极值必须满足约束
方向导数与梯度	66	高频	常见错误；概念偏差；检查计算过程
多元函数微分学的应用	49	中频	常见错误；常见粗心；概念偏差

三、考向预测

- **重组（约 50%）**：以 多元函数极限与连续、偏导数、全微分与可微性、链式法则 为核心，与前后章知识（微分/积分/级数）交叉命题。
- **迁移（约 35%）**：把本章方法迁移到几何/物理建模与含参讨论题。
- **创新（约 15%）**：参数讨论型、反例构造型与综合证明型。

四、知识框架

ch8 多元函数微分学
├── 多元函数极限与连续（中频，计算题10、选择题8、填空题6、证明题4）
├── 偏导数（高频，计算题45、填空题22、判断题11、证明题9）
├── 全微分与可微性（中频，证明题16、计算题14、判断题7、填空题4）
├── 链式法则（基础，计算题14、填空题1）
├── 隐函数求偏导（中频，计算题32、证明题4、填空题3、选择题3）
├── 多元函数极值（高频，计算题30、选择题19、证明题12、判断题9）
├── 条件极值（基础，计算题11、证明题4、填空题3、判断题1）
├── 方向导数与梯度（高频，计算题36、填空题12、判断题10、选择题5）
└── 多元函数微分学的应用（中频，计算题34、证明题6、填空题5、选择题3）

五、题型精讲

题型 1：多元函数极限与连续（计算题）

识别标志：题干要求涉及「多元函数极限与连续」的概念辨析或计算（本章 30 题，含 计算题10、选择题8、填空题6）。

典型例题 1.1（进阶 · 计算题）：

> 设 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)=(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，讨论 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性。

解析：

- Step 1：【思路分析】判断多元函数在一点的连续性，需检查极限是否等于函数值。用极坐标法或夹逼法。 *(3 分)*

- Step 2：令 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$，则 $|f(x,y) - 0| = \left|\frac{r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2}\right| = r|\cos^2\theta\sin\theta| \le r$。当 $r \to 0$ 时 $|f| \to 0$，故 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$，连续。 *(6 分)*
- Step 3：注意：$\frac{x^2y}{x^2+y^2}$ 是 $\frac{0}{0}$ 型不定式，极坐标是处理此类问题的标准方法。 *(1 分)*

✅ **答案**：连续

> ⚠ **易错点**
>
> · 直线逼近只能说明沿直线连续，不能证明全面连续 —— 直接令 $y = kx$ 代入得 $\frac{kx}{1+k^2} \to 0$（概念不清）
> · 误判为极限不存在 —— 认为不连续（概念不清）
> · 二阶连续偏导条件下混合偏导与次序无关 —— 忘记 $f_{uv} = f_{vu}$ 的对称性（概念不清）

练习：

1. 求 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ *（答案：不存在）*
2. 设 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) = (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$。判断 f 在 $(0,0)$ 处是否连续。 *（答案：B）*
3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & (x,y) = (0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 连续否？ *（答案：不连续）*
4. 问 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微的充分条件是： *（答案：B）*

题型 2：偏导数（计算题）

识别标志：题干要求涉及「偏导数」的概念辨析或计算（本章 95 题，含 计算题45、填空题22、判断题11）。

典型例题 2.1（基础 · 填空题）：

> 已知 $z = x^2y + xy^2$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 在 $(1,2)$ 处的值。

解析：

- Step 1：$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2$。 *(5 分)*
- Step 2：代入 $(1,2)$：$2 \times 1 \times 2 + 2^2 = 4 + 4 = 8$。 *(5 分)*

✅ **答案**：8

> ⚠ **易错点**

> · 漏掉 $2xy$ 项 —— 4（运算失误）
> · 将 y 也求导了 —— 12（概念不清）

练习:

1. $z = f(x^2 - y^2, xy)$，f 可微，求 z_x, z_y *（答案：$z_x = 2xf_u + yf_v$，$z_y = -2yf_u + xf_v$）*
2. 函数 $f(x,y) = x^2 \sin y$ 在点 $(1, \frac{\pi}{2})$ 处的全微分为（ ） *（答案：B）*
3. 设 $z = f(x,y)$，$x = u + v$，$y = uv$，用链式法则求 $\frac{\partial z}{\partial u}$。 *（答案：$f_x + vf_y$）*
4. 设 $z = f(x^2 + y^2)$，其中 f 可导，则 $x\frac{\partial z}{\partial y} - y\frac{\partial z}{\partial x} =$ ____。 *（答案：0）*

题型 3：全微分与可微性（证明题）

识别标志：题干要求涉及「全微分与可微性」的概念辨析或计算（本章 45 题，含 证明题16、计算题14、判断题7）。

典型例题 3.1（掌握 · 填空题）:

> 求函数$z = x^2 + y^2$在点(1,1)处的全微分。

解析:

- Step 1：求偏导：$\partial z/\partial x = 2x$，$\partial z/\partial y = 2y$ *(3 分)*
- Step 2：在点(1,1)处，$\partial z/\partial x = 2$，$\partial z/\partial y = 2$ *(3 分)*
- Step 3：全微分dz=2dx+2dy *(4 分)*

✅ **答案**：$x^2 + y^2 = z$

> ⚠ **易错点**
> · 未求具体点的偏导值 —— 忘记代入点（步骤遗漏）

练习:

1. 判断：若f(x,y)在点(x0,y0)处可微，则f在该点连续。 *（答案：正确）*
2. 设z=f(x,y)由方程$x^2 + y^2 + z^2 = 1$确定，求全微分dz。 *（答案：dz = -(x dx + y dy)/z）*
3. 设 $z = f(2x + 3y, x^2 + y^2)$，其中 f 具有二阶连续偏导数。(1) 求全微分 dz；(2) 求 $\partial^2 z/\partial x^2$。 *（答案：$(1)dz = (2f_1 + 2x\cdot f_2)dx + (3f_1 + 2y\cdot f_2)dy$；$(2)\partial^2 z/\partial x^2 = 4f_{11} + 8x\cdot f_{12} + 4x^2\cdot f_{22} + 2f_2$）*

4. 设函数 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin(1/(x^2+y^2)),(x,y)=(0,0);0,(x,y)=(0,0)$。下列选项中正确的是 *（答案：C）*

题型 4：链式法则（计算题）

识别标志：题干要求涉及「链式法则」的概念辨析或计算（本章 15 题，含 计算题14、填空题1）。

典型例题 4.1（进阶 · 计算题）：

> 设函数 z = f(xy, x/y)，其中 f 具有二阶连续偏导数。求 $\partial z/\partial x$ 和 $\partial^2 z/\partial x\partial y$。

解析：

- Step 1：令 u = xy, v = x/y，则 z = f(u,v)。由链式法则：$\partial z/\partial x = f_u\cdot\partial u/\partial x + f_v\cdot\partial v/\partial x = y\cdot f_u + (1/y)\cdot f_v$。记 $f_1=\partial f/\partial u, f_2=\partial f/\partial v$。 *(2 分)*
- Step 2：$\partial^2 z/\partial x\partial y = \partial/\partial y(y\cdot f_1+(1/y)\cdot f_2)$。需要分两项求导：$(i)\partial(y\cdot f_1)/\partial y = f_1 + y\cdot(f_{11}\cdot x + f_{12}\cdot(-x/y^2))$；$(ii)\partial((1/y)\cdot f_2)/\partial y = -(1/y^2)\cdot f_2 + (1/y)\cdot(f_{21}\cdot x + f_{22}\cdot(-x/y^2))$。 *(4 分)*
- Step 3：合并得：$\partial^2 z/\partial x\partial y = f_1 + xy\cdot f_{11} - (x/y)\cdot f_{12} - (1/y^2)\cdot f_2 + (x/y)\cdot f_{21} - (x/y^3)\cdot f_{22}$。 *(2 分)*
- Step 4：由二阶连续偏导条件知 $f_{12}=f_{21}$，消去交叉项，最终结果：$\partial z/\partial x = y\cdot f_1 + (1/y)\cdot f_2$；$\partial^2 z/\partial x\partial y = f_1 + xy\cdot f_{11} - (1/y^2)\cdot f_2 - (x/y^3)\cdot f_{22}$。 *(2 分)*

✅ **答案**：$\partial z/\partial x = y\cdot f_1 + (1/y)\cdot f_2$；$\partial^2 z/\partial x\partial y = f_1 + xy\cdot f_{11} - (1/y^2)\cdot f_2 - (x/y^3)\cdot f_{22}$

> ⚠ **易错点**
>
> · 本题主库未附错因。

练习：

1. 设 $z=x^2y$，其中 $x=t$，$y=t^2$，求 $\frac{dz}{dt}$。 *（答案：$4t^3$）*
2. 设 $z=f(e^x\sin y, x^2+y^2)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。 *（答案：$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot e^x\sin y + f_2'\cdot 2x$）*
3. 设 $z=f(xy, x^2-y^2)$，其中 f 具有一阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$。 *（答案：$\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'-2yf_2'$）*
4. 设 $z=\sin(x^2+y^2)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。 *（答案：$2x\cos(x^2+y^2)$）*

题型 5：隐函数求偏导（计算题）

识别标志：题干要求涉及「隐函数求偏导」的概念辨析或计算（本章 43 题，含 计算题32、证明题4、填空题3）。

典型例题 5.1（进阶 · 计算题）：

> 设 $z = f(x,y)$ 由方程 $z^3 - 3xyz = a^3$ 确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$。

解析：

- Step 1：【思路分析】隐函数求偏导，方程两边对 x 求偏导（z 是 x,y 的函数）。 *(3 分)*
- Step 2：两边对 x 求偏导：$3z^2 z_x - 3yz - 3xyz_x = 0$。整理得 $(3z^2 - 3xy)z_x = 3yz$，故 $z_x = \frac{yz}{z^2 - xy}$。 *(6 分)*
- Step 3：也可用隐函数求导公式 $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}$，记 $F(x,y,z) = z^3 - 3xyz - a^3$。 *(1 分)*

✅ **答案**：$\frac{yz}{z^2 - xy}$

> ⚠ **易错点**
>
> · 把 $3yz$ 的 y 误写成 x —— $\frac{xz}{z^2 - xy}$（粗心大意）
> · 乘积求导公式 $(-3xyz)_x = -3yz - 3xyz_x$ —— 忘记 $-3xyz$ 对 x 求导有两项（运算失误）
> · 未检查极限类型就下结论 —— 直接认为 $\frac{0}{0} = 0$（概念不清）

练习：

1. $e^z = xyz$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ *（答案：$\frac{z}{x(z-1)}$）*
2. 设 $F(x,y,z) = 0$，$z = z(x,y)$，证明 $\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} = -1$。 *（答案：见解析）*
3. 设 $z = z(x,y)$ 由 $F(xy, z) = 0$ 确定，F 可微，求 $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}$。 *（答案：$0$）*
4. $x + y + z = e^z$ 确定 $z = z(x,y)$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ *（答案：$\frac{1}{e^z - 1}$）*

题型 6：多元函数极值（计算题）

识别标志：题干要求涉及「多元函数极值」的概念辨析或计算（本章 75 题，含 计算题30、选择题19、证明题12）。

典型例题 6.1（基础 · 选择题）：

> 函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在点 $(0,0)$ 处（ ）

解析：

- Step 1：$f_x=2x,\ f_y=2y$，驻点 $(0,0)$。 *(3 分)*
- Step 2：二阶偏导 $f_{xx}=2,\ f_{yy}=2,\ f_{xy}=0$，$\Delta=4>0$，且 $f_{xx}>0$，故为极小值。 *(7 分)*

✅ **答案**：B

> ⚠ **易错点**
>
> · 误判符号 —— 选 A（运算失误）
> · 认为 $\Delta>0$ 则为鞍点，但 f_{xx} 正 —— 选 D（概念不清）

练习：

1. 求 $f(x,y)=x^2+y^2-xy-2x+y$ 的极值 *（答案：极小值 $f(1,0)=-1$）*
2. 求函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-3x-3y$ 的极值点。 *（答案：$(1,1)$ 为极小值点，极小值 -3）*
3. 求 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的极值 *（答案：极小值 $f(1,1)=-1$）*
4. 函数 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$ 的驻点为（ ） *（答案：A）*

题型 7：条件极值（计算题）

识别标志：题干要求涉及「条件极值」的概念辨析或计算（本章 19 题，含 计算题11、证明题4、填空题3）。

典型例题 7.1（基础 · 计算题）：

> 求函数$f(x,y)=x^2+xy+y^2$在约束条件x+y=1下的条件极值。

解析：

- Step 1：拉格朗日函数$L=x^2+xy+y^2+\lambda(x+y-1)$ *(2 分)*
- Step 2：偏导：$\partial L/\partial x=2x+y+\lambda=0$，$\partial L/\partial y=x+2y+\lambda=0$，$\partial L/\partial\lambda=x+y-1=0$ *(2 分)*
- Step 3：前两式相减得x-y=0，故x=y *(2 分)*
- Step 4：代入约束得x=y=1/2 *(2 分)*

- Step 5：f=1/4+1/4+1/4=3/4　*(2 分)*

✅ **答案**：极小值3/4，在(1/2,1/2)处

> ⚠ **易错点**
>
> · 方法错误 —— 忘记构造拉格朗日函数（概念不清）

练习：

1. 求函数$f(x,y)=x^2+2y^2$在约束条件$x^2+y^2=1$下的最大值和最小值。 *（答案：最大值2，最小值1）*
2. 在条件x+y+z=1下，函数$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$的极小值为_____。 *（答案：1/3）*
3. 函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在约束条件 $x+y=1$ 下的最小值为 _____。 *（答案：$\frac{1}{2}$）*
4. 用拉格朗日乘数法求 $f(x,y)=xy$ 在约束 $x+y=2$ 下的最大值。 *（答案：最大值 1（$x=y=1$ 处））*

题型 8：方向导数与梯度（计算题）

识别标志：题干要求涉及「方向导数与梯度」的概念辨析或计算（本章 66 题，含 计算题36、填空题12、判断题10）。

典型例题 8.1（进阶 · 计算题）：

> 函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在点 $(1,1)$ 处沿方向 $\vec{l}=(1,2)$ 的方向导数为：

解析：

- Step 1：【思路分析】方向导数公式 $\frac{\partial f}{\partial l}=\nabla f\cdot\vec{l}_0$，其中 $\vec{l}_0$ 是单位方向向量。 *(3 分)*
- Step 2：$\nabla f=(2x,2y)$，在 $(1,1)$ 处为 $(2,2)$。$\vec{l}_0=\frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}}=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$。方向导数为 $(2,2)\cdot(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})=\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}$。 *(6 分)*
- Step 3：注意：方向导数与梯度的关系：梯度方向是方向导数最大的方向。 *(1 分)*

✅ **答案**：$\frac{6}{\sqrt{5}}$

> ⚠ **易错点**
>
> · 方向导数公式中需用单位方向向量 —— 忘记单位化直接用 $(1,2)$（概念不清）
> · 梯度是偏导组成的向量 —— 梯度计算错误为 (x^2,y^2)（运算失误）

> · $\ln\cos x$ 在 $x=0$ 附近为 $\ln(1-\frac{x^2}{2}+\ldots)\sim-\frac{x^2}{2}$ —— 误解 $\ln\cos x$ 在 $x=0$ 处为 $\ln 1=0$（概念不清）

练习:

1. $f(x,y)=x^2+2y^2$ 在 $(1,1)$ 处沿 $\vec{l}=(1,1)$ 的方向导数 *（答案：$3\sqrt{2}$）*
2. 函数 $f(x,y)=x^2y$ 在点 $(1,2)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？最大值为多少？ *（答案：$\nabla f(1,2)=(4,1)$，最大方向导数为 $\sqrt{17}$）*
3. 函数 $f(x,y)=x^2y$ 在点 $(1,2)$ 处沿曲线 $y=x^2$ 在该点切线方向的方向导数为： *（答案：0）*
4. $f=x^2y$ 在 $(1,2)$ 处沿哪个方向方向导数最大? *（答案：$(4,1)$，$\sqrt{17}$）*

题型 9：多元函数微分学的应用（计算题）

识别标志：题干要求涉及「多元函数微分学的应用」的概念辨析或计算（本章 49 题，含 计算题34、证明题6、填空题5）。

典型例题 9.1（基础 · 计算题）:

> 求曲线 $\mathbf{r}(t)=(t,\ t^2,\ t^3)$ 在 $t=1$ 处的切向量和切线方程。

解析:

- Step 1:【思路分析】切向量为 $\mathbf{r}'(t)$，在 $t=1$ 处求值。 *(3 分)*
- Step 2: $\mathbf{r}'(t)=(1,2t,3t^2)$，$\mathbf{r}'(1)=(1,2,3)$。 *(3 分)*
- Step 3: $\mathbf{r}(1)=(1,1,1)$，切线方程 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$。 *(4 分)*

✅ **答案**：切向量 $(1,2,3)$，切线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$

> ⚠ **易错点**
>
> · 混淆位置与切向量 —— 切向量写成 $(1,1,1)$（概念不清）
>
> · 粗心 —— 切线方程漏 z 项（粗心大意）

练习:

1. 求曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=x^2-y^2\end{cases}$ 在点 $(1,0,1)$ 处的切向量。 *（答案：$(0,1,0)$）*

2. 求曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线在点 $(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}})$ 处的切向量。 *（答案：$(1,-1,0)$ 或其倍数）*

3. 求曲线 $\vec{r}(t)=(t,\ t^2,\ t^3)$ 在 $t=1$ 处的切线和法平面方程。 *（答案：切线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$，法平面 $x+2y+3z-6=0$）*

4. 曲面 $z=x^2+y^2$ 在点 $(1,1,2)$ 处的法线方程为____。 *（答案：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$）*

六、方法总结

题型	方法	注意事项
多元函数极限与连续	计算题	常见粗心；偏导概念不清
偏导数	计算题	常见错误；概念偏差
全微分与可微性	证明题	需验证定义；未求具体点的偏导值
链式法则	计算题	y 也随 t 变化，须用链式法则；$2t \cdot t^2 + t^2 \cdot 2t
隐函数求偏导	计算题	常见错误；概念偏差
多元函数极值	计算题	概念偏差；常见错误
条件极值	计算题	方法错误；未讨论x=0或y=0
方向导数与梯度	计算题	常见错误；概念偏差
多元函数微分学的应用	计算题	常见错误；常见粗心

高频错误速查：概念不清 × 276；运算失误 × 248；步骤遗漏 × 92；粗心大意 × 83；方法选择不当 × 38。

七、交互式自测

本章主库可作答题目 **437 题**，建议按「基础 → 进阶 → 掌握 → 挑战」分层完成：113 / 137 / 123 / 62。

八、压轴题三视角：重组 / 迁移 / 创新

视角 1（重组）：设 $z = f(x, y)$ 有二阶连续偏导，$x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，证明 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}$。

视角 2（迁移）：二元分类交叉熵损失 $L = -[y\ln p + (1-y)\ln(1-p)]$，$p = \sigma(wx + b)$。求 $\frac{\partial L}{\partial w}$。

视角 3（创新）：平面两连杆运动学 $\begin{cases} x = L_1\cos\theta_1 + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \\ y = L_1\sin\theta_1 + L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \end{cases}$，求雅可比矩阵 J。

九、思维品格加油站

- **品格一 · 局部与整体**：从一元到多元，用局部线性逼近把握整体形态。
- **品格二 · 计算耐力**：多重链式法则考验条理与耐心，步骤即方法。
- **品格三 · 最优化意识**：极值与条件极值呼应现实中的"最优"问题。

考研数学一 ·「重积分」一轮复习教案

> 由定积AI 真题主库派生（零编造 · 零外链）。本章映射主库 **320 题**，覆盖 **2 个知识点**；例题、答案、易错点、压轴题均取自可作答题目。

一、考情分析

「重积分」是考研数学的考点，章内主库题量 **320 题**，难度分布：基础 96 · 进阶 117 · 掌握 83 · 挑战 24。

知识点覆盖：二重积分（244 题）；三重积分（76 题）

二、历年命题规律（方向分析）

节点	题量	考频	典型抓手
二重积分	244	高频	检查计算过程；概念偏差；极坐标面积元素 $rdrd\theta$ 的 r 是雅可比行列式的结果
三重积分	76	中频	检查计算过程；概念偏差；常见粗心

三、考向预测

- **重组（约 50%）**：以 二重积分、三重积分 为核心，与前后章知识（微分/积分/级数）交叉命题。
- **迁移（约 35%）**：把本章方法迁移到几何/物理建模与含参讨论题。
- **创新（约 15%）**：参数讨论型、反例构造型与综合证明型。

四、知识框架

```
ch9 重积分
├── 二重积分（高频，计算题150、选择题39、填空题22、证明题18）
└── 三重积分（中频，计算题51、填空题16、选择题6、判断题2）
```

五、题型精讲

题型 1：二重积分（计算题）

识别标志：题干要求涉及「二重积分」的概念辨析或计算（本章 244 题，含 计算题150、选择题39、填空题22）。

典型例题 1.1（基础 · 计算题）：

> 计算二重积分 $I = \iint_D xy\,d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2\}$。

解析：

- Step 1: $I = \int_0^1 \int_0^2 xy\,dy\,dx = \int_0^1 x \cdot \frac{1}{2}y^2\Big|_0^2 dx = \int_0^1 2x dx = 1$ *(10 分)*

✅ **答案**：1

> ⚠ **易错点**
>
> · 计算 $\int_0^1 2x dx$ 时忘记 $\frac{1}{2}$，或 $\int_0^1 y dy$ 算成 1 —— 2（运算失误）
> · 错误地用对称性，但区域不是关于原点对称 —— 0（粗心大意）
> · 极坐标面积元素 $rdrd\theta$ 的 r 是雅可比行列式的结果 —— 极坐标下面积元素写成 $d\sigma = drd\theta$，遗漏 r 因子（概念不清）

练习：

1. 计算二重积分 $I = \iint_D x^2 d\sigma$，其中 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$。 *（答案：$\frac{2}{3}$）*
2. 计算二重积分 $I = \iint_D (x+y)\,d\sigma$，其中 D 由 $x=0, y=0, x+y=1$ 围成。 *（答案：$\frac{1}{3}$）*
3. 交换积分次序：$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy$。 *（答案：$\int_0^1 dy \int_y^1 f(x,y)dx$）*
4. 计算二重积分 $I = \iint_D y\sin(xy)\,d\sigma$，其中 $D = [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$。 *（答案：$\frac{\pi}{2} - 1$）*

题型 2：三重积分（计算题）

识别标志：题干要求涉及「三重积分」的概念辨析或计算（本章 76 题，含 计算题51、填空题16、选择题6）。

典型例题 2.1（基础 · 计算题）：

> 计算三重积分 $I = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dV$，其中 Ω 为圆柱体 $x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3$。

解析：

- Step 1:【思路分析】被积函数为 $x^2+y^2=r^2$，区域为圆柱，用柱坐标最自然，z 从0到3，r 从0到2，θ 从0到2π。 *(3 分)*
- Step 2: 柱坐标变换：$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = z,\ dV = r\,dr\,d\theta\,dz$。 *(3 分)*
- Step 3: $I = \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^3 r^2 \cdot r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^3 dr \int_0^3 dz = 2\pi \cdot \frac{16}{4} \cdot 3 = 24\pi$。 *(4 分)*

✅ **答案**：48π

> ⚠ **易错点**
>
> · 漏掉 r 因子或 z 积分长度算错 —— 12π（运算失误）

> · 将 x^2+y^2 误认为 r，少乘 r —— 72π（概念不清）

练习：

1. 计算 $\iiint_\Omega z\,dV$，其中 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和平面 $z=1$ 围成。 *（答案：$\frac{\pi}{4}$）*
2. 计算三重积分 $I=\iiint_\Omega \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dV$，其中 Ω 是球体 $x^2+y^2+z^2\le a^2$。 *（答案：πa^4）*
3. 将三重积分 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$ 在柱坐标下展开，其中 Ω 由 $z=x^2+y^2$ 与 $z=2$ 围成。 *（答案：$\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_{r^2}^{2} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\,r\,dz\,dr\,d\theta$）*
4. 用先二后一法（截面法）计算 $\iiint_\Omega z^2\,dV$，其中 Ω 为单位球体 $x^2+y^2+z^2\le 1$。 *（答案：$\frac{4\pi}{15}$）*

六、方法总结

题型	方法	注意事项
二重积分	计算题	检查计算过程；概念偏差
三重积分	计算题	检查计算过程；概念偏差

高频错误速查：概念不清 × 231；运算失误 × 181；粗心大意 × 68；步骤遗漏 × 63；方法选择不当 × 30。

七、交互式自测

本章主库可作答题目 **320 题**，建议按「基础 → 进阶 → 掌握 → 挑战」分层完成：96 / 117 / 83 / 24。

八、压轴题三视角：重组 / 迁移 / 创新

视角 1（重组）：计算二重积分 $I=\iint_D \sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)\,d\sigma$，其中 $D:x^2+y^2\le 1$。

视角 2（迁移）：证明：若 $f(x,y)$ 在关于 x 轴对称的区域 D 上连续，且 $f(x,-y)=-f(x,y)$，则 $\iint_D f\,d\sigma=0$。

视角 3（创新）：创造一道需要用 $\iint_D f(x,y)\,dA$ 表示旋转体体积的问题。

九、思维品格加油站

- **品格一 · 化繁为简**：把区域分解、把积分累次，复杂问题拆成可算的块。
- **品格二 · 几何想象力**：在坐标变换中理解面积与体积元素的伸缩。
- **品格三 · 守恒思想**：换元积分中的雅可比，体现"度量随变换而变"。